सत्यमेव जयते

UPPSC/UPPCS
Exam Paper

यूपीपीएससी – यूपीपीसीएस

मुख्य परीक्षा 2020

वैकल्पिक विषय

प्रश्न पत्र

“गणित द्वितीय प्रश्न पत्र”

परीक्षा तिथि: 25th जनवरी 2020

No. of Printed Pages : 5

Serial No. 5055785

PSL – 06/20-Paper-II

गणित (प्रश्न–पत्र – II)

MATHEMATICS (PAPER – II)

निर्धारित समय : तीन घंटे] [अधिकतम अंक : 200

Time Allowed : Three Hours] [Maximum Marks : 200

विशेष अनुदेश :

(i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिये गये हैं, जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं ।

(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के अंत में निर्धारित अंक अंकित हैं ।

(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

(v) सामान्य कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

Specific Instructions :

(i) There are total **eight** questions in **two** Sections, printed both in **Hindi and English**.

(ii) Answer **five** questions, selecting atleast **two** questions from **each** Section.

(iii) Marks are given against **each** question.

(iv) All questions carry **equal** marks.

(v) Simple calculators are **allowed**.

खण्ड – अ / SECTION – A

1. (a) दिखाइये कि गुणक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$, क्रमचय समूह $G' = \{I, (abcd), (ac)(bd), (adcb)\}$ के तुल्यकारी है, जहाँ a, b, c, d चार प्रतीक हैं। **15**

Show that the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$ is isomorphic to the permutation group $G' = \{I, (abcd), (ac)(bd), (adcb)\}$, where a, b, c, d are four symbols.

(b) सिद्ध कीजिये कि यूक्लीडियन वलय R की आदर्श S उच्चिष्ठ होगी यदि और केवल यदि S, R के किसी अभाज्य अवयव के द्वारा उत्पन्न हो। **15**

Prove that an Ideal S of the Euclidean ring R is maximal if and only if S is generated by some prime element of R.

P.T.O.

(c) यदि H तथा K, समूह G के परिमित उपसमूह हैं, तो सिद्ध कीजिये कि $O(HK)=\dfrac{O(H)O(K)}{O(H\cap K)}$ । 10

If H and K be finite subgroups of a Group G, then prove that $O(HK)=\dfrac{O(H)O(K)}{O(H\cap K)}$.

2\. (a) यदि $f(x)=x^3$, $[0,a]$ पर परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिये कि $f\in R\,[a,0]$ तथा $\int_0^a f(x)dx=\dfrac{a^4}{4}$ । 15

If $f(x)=x^3$ is defined on $[0,a]$, then prove that $f\in R\,[a,0]$ and $\int_0^a f(x)dx=\dfrac{a^4}{4}$.

(b) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(n+x^2)^2}$ का पदानुसार समाकलन एवं एक समान अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि $\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(n+x^2)^2}\right)dx=\dfrac{1}{2}$ । 15

Test for uniform convergence and term by term integration of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(n+x^2)^2}$ and prove that $\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(n+x^2)^2}\right)dx=\dfrac{1}{2}$.

(c) दिखाइये कि अनुक्रम $\langle f_n\rangle$ कॉंची अनुक्रम नहीं है, जहाँ $f_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)}$ तथा यह भी बताइये कि क्या यह अभिसारी है ? 10

Show that the sequence $\langle f_n\rangle$, where $f_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)}$ is not a Cauchy sequence. Is it convergent ?

3\. (a) दिखाइये कि विषम समाकलन $\int_0^{\infty}\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$ अभिसारी है। 15

Show that the improper integral $\int_0^{\infty}\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$ is convergent.

(b) दिखाइये कि अनुक्रम $\langle f_n\rangle$ अभिसारी है, जहाँ $f_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ तथा सिद्ध कीजिये कि $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 2 तथा 3 के बीच है। 15

Show that the sequence $\langle f_n\rangle$ defined by $f_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ is convergent and show that $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lies between 2 and 3.

(c) यदि (X, d_1) तथा (Y, d_2) दो दूरीक समष्टि हैं, तो सिद्ध कीजिये कि फलन $f : X \to Y, a \in X$ पर सतत होगा यदि और केवल यदि X में प्रत्येक अनुक्रम $\langle a_n \rangle, a \in X$ पर अभिसरित है तथा अनुक्रम $\langle f(a_n) \rangle$, $f(a)$ पर अभिसरित है। **10**

If (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces, prove that a function $f : X \to Y$ is continuous at $a \in X$ if and only if for each sequence $\langle a_n \rangle$ in X converging to $a \in X$, the sequence $\langle f(a_n) \rangle$ converges to $f(a)$.

4. (a) समोच्च समाकलन विधि से सिद्ध कीजिये $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$। **15**

By the method of contour integration, prove that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

(b) यदि एक फलन $f(z)$, केन्द्र $z = a$ तथा त्रिज्या R वाले वृत्त C के अन्दर विश्लेषिक है, तो सिद्ध कीजिये कि C के अन्दर प्रत्येक बिन्दु z पर $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(a) \frac{(z-a)^n}{n!}$ है। **15**

If a function $f(z)$ is analytic within a circle C with its centre $z = a$ and radius R, then prove that at every point z inside C is $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(a) \frac{(z-a)^n}{n!}$.

(c) प्रत्येक विशिष्टता के लक्षण इंगित करते हुये फलन $\frac{e^{\left(\frac{c}{z-a}\right)}}{e^{\frac{z}{a}} - 1}$ की विशिष्टतायें ज्ञात कीजिये। **10**

Find the singularities of the function $\frac{e^{\left(\frac{c}{z-a}\right)}}{e^{\frac{z}{a}} - 1}$, indicating the character of each singularity.

खण्ड – ब / SECTION – B

5. (a) निम्नलिखित आंशिक अवकलन समीकरण को हल कीजिये : **15**

$q^2 r - 2pqs + p^2 t = pq^2$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial p}{\partial x}, s = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, t = \frac{\partial q}{\partial y}$।

Solve the following partial differential equation :

$q^2 r - 2pqs + p^2 t = pq^2$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial p}{\partial x}, s = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, t = \frac{\partial q}{\partial y}$.

(b) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ कैनोनिकल (विहित) प्रारूप में परिवर्तित कीजिये तथा उसे हल कीजिये। **15**

Reduce the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ to canonical form and hence solve it.

(c) चारपिट विधि से हल कीजिये : $px + qy = z(1 + pq)^{\frac{1}{2}}$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$। **10**

Solve by Charpit's method : $px + qy = z(1 + pq)^{\frac{1}{2}}$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

5. (a) एक एकसमान असम्पीड्य तरल का अनन्त द्रव्यमान जो कि एकसमान दबाव π पर स्थिर अवस्था में है, जिसमें a त्रिज्या वाली एक गोलाकार गुहा है, जो $m\pi$ दबाव पर एक गैस से भरी है। सिद्ध कीजिये कि यदि गैस का जड़त्व नगण्य हो, तो आगामी गति में बायल के नियम को प्रभावी मानते हुये गोले की त्रिज्या a तथा na के बीच दोलन करेगी, जहाँ n समीकरण $1 + 3m \log n - n^3 = 0$ के द्वारा निर्धारित है।

यदि m लगभग 1 के बराबर हो, तो दोलन का समय $2\pi\sqrt{\dfrac{a^2\rho}{3\pi}}$ होगा, जहाँ ρ तरल का घनत्व है। 15

An infinite mass of homogeneous incompressible fluid is at rest subject to a uniform pressure π and contains a spherical cavity of radius a, filled with a gas at a pressure $m\pi$, prove that if the inertia of the gas be neglected, the Boyle's law be supposed to hold throughout the ensuing motion, the radius of sphere will oscillate between the values a and na, where n is determined by the equation $1 + 3m \log n - n^3 = 0$.

If m be nearly equal to 1, the time of oscillation will be $2\pi\sqrt{\dfrac{a^2\rho}{3\pi}}$, ρ being the density of the fluid.

(b) नियत परिसीमाओं $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ और $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ के बीच बिन्दु $(r = a, \theta = 0)$ पर m सामर्थ्य वाले एक स्रोत तथा बिन्दु $(r = b, \theta = 0)$ पर उसी के बराबर अभिगम के कारण द्विविमीय तरल गति है। सिद्ध कीजिये कि धारा फलन का मान $-m\tan^{-1}\left\{\dfrac{r^4(a^4-b^4)\sin 4\theta}{r^8 - r^4(a^4+b^4)\cos 4\theta + a^4b^4}\right\}$ होगा। 15

Between the fixed boundaries $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ and $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, there is a two dimensional liquid motion due to a source of strength m at the point $(r = a, \theta = 0)$ and an equal sink at the point $(r = b, \theta = 0)$. Show that the stream function is

$$-m\tan^{-1}\left\{\frac{r^4(a^4-b^4)\sin 4\theta}{r^8 - r^4(a^4+b^4)\cos 4\theta + a^4b^4}\right\}.$$

(c) यदि किसी तरल के कण एक नियत केन्द्र के सापेक्ष सममित रूप से गतिमान हैं, तो सिद्ध कीजिये कि निरन्तरता का समीकरण $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2u) = 0$ होगा, जहाँ u, दूरी r पर वेग है। 10

The particles of a fluid move symmetrically in space with regard to a fixed centre. Prove that the equation of continuity is $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2u) = 0$, where u is the velocity at distance r.

(a) सिद्ध कीजिये कि किसी ठोस शंकु के गोलाकार किनारे के किसी बिन्दु पर आघूर्णी दीर्घवृत्तज का समीकरण $(3a^2 + 2h^2)x^2 + (23a^2 + 2h^2)y^2 + 26a^2z^2 - 10ahxz$ = नियतांक होगा, जहाँ h शंकु की ऊँचाई तथा a आधार की त्रिज्या है। 15

Prove that the equation of the momental ellipsoid at a point on the circular edge of a solid cone is $(3a^2 + 2h^2)x^2 + (23a^2 + 2h^2)y^2 + 26a^2z^2 - 10ahxz$ = constant, where h is the height of the cone and a is the radius of base.

(b) दिखाइये कि किसी द्विपाशी वक्र $r^2 = a^2\cos 2\theta$ के अर्ध पाश की किसी संधि पर मुख्य अक्षों का प्रारम्भिक रेखा के साथ झुकाव $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$ तथा $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$ होगा। 15

Show that the principal axes at the node of a half loop of the lemniscate $r^2 = a^2\cos 2\theta$ are inclined to the initial line at angles $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$ and $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$.

(c) किसी पिण्ड के संवेग का आघूर्ण किसी स्थिर मूल बिन्दु O के परितः ज्ञात कीजिये, जबकि पिण्ड द्वि आयामी गति में गतिमान है। 10

Find the moment of momentum of the body about the fixed origin O, when the body is moving in two dimensions.

8. (a) निम्नलिखित सारणी से ऐसे छात्रों की संख्या का अंतर्वेशन विधि से आकलन कीजिये, जिन्होंने 40 तथा 45 के बीच अंक प्राप्त किये हों। 15

अंक	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
छात्रों की संख्या	31	42	51	35	31

From the following table, estimate the number of students who obtained marks between 40 and 45 using interpolation formula.

Marks	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
No. of students	31	42	51	35	31

(b) रंगे-कुट्टा चतुर्थ कोटि विधि का प्रयोग करते हुये $y(1.1)$ का मान ज्ञात कीजिये, दिया हुआ है कि $\frac{dy}{dx}=y^2+xy,\ y(1)=1.0,\ h=0.05$ लीजिए। 15

Find the value of $y(1.1)$, using Runge – Kutta 4^{th} order method, given that $\frac{dy}{dx}=y^2+xy,\ y(1)=1.0$, take $h=0.05$.

(c) समाकलन की सीमा को चार बराबर भागों में विभाजित कर सिम्पसन के '$\frac{1}{3}$' नियम का प्रयोग करके $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$ से $\log_e 2$ का मान ज्ञात कीजिये। अशुद्धि भी ज्ञात कीजिये। 10

Find the value of $\log_e 2$ from $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$, using Simpson's '$\frac{1}{3}$' rule, by dividing the range of integration into four equal parts. Also find the error.