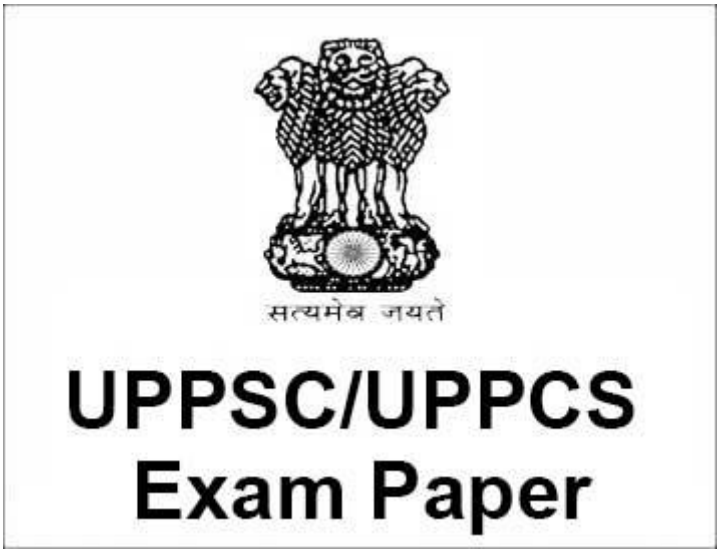

यूपीपीएससी – यूपीपीसीएस

मुख्य परीक्षा 2020

वैकल्पिक विषय

प्रश्न पत्र

“गणित प्रथम प्रश्न पत्र”

परीक्षा तिथि: 25th जनवरी 2020

No. of Printed Pages : 4

Serial No. 5042472

PSL – 06/20-Paper-I

गणित (प्रश्न-पत्र - I)

MATHEMATICS (PAPER - I)

निर्धारित समय : तीन घंटे] [अधिकतम अंक : 200

Time Allowed : Three Hours] [Maximum Marks : 200

विशेष अनुदेश :

(i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिये गये हैं, जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के अंत में निर्धारित अंक अंकित हैं।

(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Specific Instructions :

(i) There are total eight questions in two Sections printed in both Hindi and English.

(ii) Answer five questions, selecting atleast two questions from each Section.

(iii) Marks are given against each of the question.

(iv) All questions carry equal marks.

खण्ड – अ/SECTION – A

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 10

गुणन की गणना पहले न करते हुए एक आव्यूह के रूप में आव्यूह गुणन के व्युत्क्रम को ज्ञात कीजिए।

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Find the inverse of the matrix product in the form of a single matrix without first evaluating the product.

Downloaded from: http://studymarathon.com/

(b) दिखाइए कि समुच्चय $\{(1, 1, 0, 1), (1, -2, 0, 0), (1, 0, -1, 2)\}$ R^4 का एक रैखिकत: स्वतन्त्र उपसमुच्चय है । इस समुच्चय को R^4 के एक आधार में विस्तारित कीजिए। 15

Show that the set $\{(1, 1, 0, 1), (1, -2, 0, 0), (1, 0, -1, 2)\}$ is a linearly independent subset of R^4. Extend this set to a basis of R^4.

(c) दिखाइए कि $T : C^3 \to C^3$, जो $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$ से परिभाषित है, एक रैखिक रूपांतरण है तथा सत्यापित कीजिए : 15

Rank T + Nullity T = 3.

Show that $T : C^3 \to C^3$, defined by $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$, is a linear transformation and verify that :

Rank T + Nullity T = 3.

2. (a) सिद्ध कीजिए कि एक वास्तविक सममित आव्यूह के दो विभिन्न आईगन मानों के संगत आईगन सदिश लांबिक होते हैं । 10

Prove that the eigenvectors corresponding to two distinct eigenvalues of a real symmetric matrix are orthogonal.

(b) R^3 के लिये एक प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए जिसमें सदिश $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ सम्मिलित हो । 15

Find an orthonormal basis for R^3 containing the vector $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

(c) वास्तविक आव्यूह $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ का अल्पिष्ट बहुपद ज्ञात कीजिए । 15

Find the minimal polynomial for the real matrix $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

3. (a) रेखा $2x + 3y = 6, z = 0$ को y–अक्ष के परित: घुमाने से बने शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए । 10

Find the equation of the cone formed by rotating the line $2x + 3y = 6, z = 0$ about the y-axis.

(b) उन रेखाओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो zx–तल के समांतर चलती है तथा वक्रों : 15

$xy = c^2, z = 0$; $y^2 = 4cz, x = 0$ से मिलती हैं ।

Find the locus of lines which move parallel to the zx-plane and meet the curves :

$xy = c^2, z = 0$; $y^2 = 4cz, x = 0$.

(c) परवलयज $(x + y + z)(2x + y - z) = 6z$ की बिन्दु $(1, 1, 1)$ से होकर गुजरने वाली जनक रेखाओं के समीकरणों को ज्ञात कीजिए । 15

Find the equations to the generating lines of the paraboloid $(x + y + z)(2x + y - z) = 6z$ which pass through the point $(1, 1, 1)$.

Downloaded from: http://studymarathon.com/

(a) ϵ-δ परिभाषा के प्रयोग से दिखाइए कि $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$ 10

Use ϵ-δ definition to show that $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$.

(b) दिखाइए कि उपयुक्त प्रतिबन्धों के अधीन $f(xy, z-2x)=0$ समीकरण $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2x$ को संतुष्ट करता है। यह प्रतिबन्ध क्या हैं ? 15

Show that $f(xy, z-2x)=0$ satisfies under suitable conditions, the equation $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2x$. What are these conditions ?

(c) ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित करते हुए $\iint xy\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$ की दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के धनात्मक चतुर्थांश पर गणना कीजिए। 15

By changing to Polar coordinates evaluate $\iint xy\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$ over the positive quadrant of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

खण्ड – ब / SECTION – B

10

5. (a) हल कीजिए :
Solve :
$(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)ydx+(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)xdy=0.$ 15

(b) हल कीजिए :
Solve :
$\frac{d}{dx}\left(\cos^2 x\frac{dy}{dx}\right)+y\cos^2 x=0.$

(c) यदि U और V दो अदिश क्षेत्र है और $\vec{F}$ एक सदिश क्षेत्र इस प्रकार है कि $U\vec{F}=\text{grad } V$, तो $\vec{F}\cdot\text{Curl}\,\vec{F}$ की गणना कीजिए। 15
If U and V are two scalar fields and $\vec{F}$ is a vector field such that $U\vec{F}=\text{grad } V$, find $\vec{F}\cdot\text{Curl}\,\vec{F}$.

6. (a) फलन F(u) को ज्ञात कीजिए ताकि $\vec{\gamma}=(a\cos u, a\sin u, F(u))$ से दिये जाने वाला वक्र समतलीय वक्र हो। 10
Determine the function F(u) so that curve given by $\vec{\gamma}=(a\cos u, a\sin u, F(u))$ is a plane curve.

(b) वक्र (पृष्ठों के प्रतिच्छेदन) $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=1$ के बिन्दु (1, 0, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 15
Find the equation of the tangent line at the point (1, 0, 0) of the curve (intersection of surfaces) $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=1$.

Downloaded from: http://studymarathon.com/

(c) $\vec{F} = 2yz\hat{i} + 3x\hat{j} - z^2\hat{k}$ के लिये स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए, जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का ऊर्ध्व–अर्ध पृष्ठ है तथा C इसकी सीमा है। 15

Verify Stoke's theorem for $\vec{F} = 2yz\hat{i} + 3x\hat{j} - z^2\hat{k}$, where S is the upper – half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and C is its boundary.

7. (a) एक ही स्तर पर '2a' दूरी पर स्थित दो स्थिर छोटी खूटियों पर भारी डोरी लटकती है। दिखाइए कि संतुलन असंभव होगा जब तक डोरी की न्यूनतम लम्बाई 2ae न हो। 10

Heavy string hangs over two fixed small pegs in the same level '2a' aparts. Show that equilibrium is impossible unless the least length of string is 2ae.

(b) बल F_1, F_2, F_3 क्रमश: निम्न तीन सरल रेखाओं के अनु लगे हैं : 15

$y = b, z = -c; z = c, x = -a$ तथा $x = a, y = -b$

दिखाइए कि उनका अकेला एक परिणामी होगा यदि $\frac{a}{F_1} + \frac{b}{F_2} + \frac{c}{F_3} = 0$.

Forces F_1, F_2, F_3 act along the three following straight lines :
$y = b, z = -c; z = c, x = -a$ and $x = a, y = -b$ respectively.

Show that they will have a single resultant if $\frac{a}{F_1} + \frac{b}{F_2} + \frac{c}{F_3} = 0$.

(c) एक सम पंचभुज ABCDE बराबर भारी एक समान छड़ों को जोड़कर बनाया गया है, जो जोड़ A से लटक रहा है तथा BC एवं DE के मध्य बिन्दुओं को एक हल्की छड़ के द्वारा जोड़ते हुए अपने रूप में अनुरक्षित है। इस छड़ में प्रतिबल ज्ञात कीजिए। 15

A regular pentagon ABCDE formed by equal heavy uniform bars jointed together, is suspended from the joint A and is maintained in form by a light rod joining the middle points of BC and DE. Find the stress in this rod.

8. (a) उस केन्द्रीय बल को ज्ञात कीजिए जिसके अधीन एक कण वक्र $r^2 = a^2\cos 2\theta$ का अनुरेखण करता हो। 10

Find the central force under which a particle describes the curve $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

(b) एक गतिमान ग्रह का त्वरण $\frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$ के बराबर है और त्वरण की दिशा एक स्थिर बिन्दु (तारा) की ओर है। सिद्ध कीजिए ग्रह का पथ एक शांकव है। प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिसके अन्तर्गत यह पथ (a) दीर्घवृत्त (b) परवलय (c) अतिपरवलय हो जाये। 15

Prove that the path of a planet, which is moving so that its acceleration is always directed to a fixed point (star) and is equal to $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$, is a conic section. Find the conditions under which the path becomes (a) ellipse (b) parabola (c) hyperbola.

(c) एक कण एक चिकने चक्रज के चाप के अनुदिश जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष नीचे है, फिसलता है। सिद्ध कीजिए कि ऊर्ध्वाधर ऊंचाई के पूर्वार्ध भाग गिरने का समय उत्तरार्ध भाग गिरने के समय के बराबर है। 15

A particle slides down the arc of a smooth cycloid whose axis is vertical and vertex lowest. Prove that the time occupied in falling down the first half of the vertical height is equal to the time of falling down the second half.

Downloaded from: http://studymarathon.com/