सत्यमेव जयते

UPPSC

Uttar Pradesh Public Service Commission

Download UPPSC/UPPCS Mains 2019 Optional Exam Question Paper

"Mathematics (Paper-2)"

"Held on 26-09-2020"

$E_{n+1} = E_n - \frac{(\alpha+E_n)^2 - 17}{}$

$= E_n - \frac{f(\alpha+E_n)}{f'(\alpha+E_n)}$

No. of Printed Pages : 7

Serial No.

GLPC – 06/19-Paper-II

गणित (प्रश्न-पत्र – II)

MATHEMATICS (Paper – II)

निर्धारित समय : तीन घंटे] [अधिकतम अंक : 200

Time Allowed : Three Hours] [Maximum Marks : 200

विशेष अनुदेश : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम **दो** प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) **प्रत्येक** प्रश्न के अंत में निर्धारित अंक अंकित है ।

(iv) **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।

(v) सामान्य केल्कुलेटर का **उपयोग** किया जा सकता है ।

Specific Instructions : (i) There are total **eight** questions in **two** Sections, printed both in **Hindi** and **English**.

(ii) Answer **five** questions, selecting atleast **two** questions from **each** Section.

(iii) Marks are given against **each** of the question.

(iv) **All** questions carry **equal** marks.

(v) Simple calculators are **allowed**.

खण्ड – अ/SECTION – A

1. (a) यदि $f:G \rightarrow G'$, जहाँ G एवं G' समूह हैं, पर एक समरूपता है, जिसकी अष्टि K है, तो सिद्ध कीजिए कि K, G का एक सामान्य सहसमूह है, तथा विभाग समूह G/K, f के पतिबिंब के तुल्याकारी है । **15**

Let $f:G \rightarrow G'$, where G and G' are groups, be a homomorphism with kernel K, then prove that K is a normal subgroup of G and the quotient group G/K is isomorphic to the image of f.

Ma 7, 8

(b) यदि R, वास्तविक मान के [0, 1] बंद अंतराल पर सतत् फलनों का वलय (रिंग) है तथा $M=\left\{f \in R : f\left(\frac{1}{3}\right)=0\right\}$, तो दर्शाइये कि M, R का उच्चिष्ठ गुणाजवली है । **15**

Let R be the ring of all real valued continuous functions on the closed interval [0, 1] and $M=\left\{f \in R : f\left(\frac{1}{3}\right)=0\right\}$, then show that M is the maximal ideal of R.

(c) दर्शाइये कि सूचकांक 2 वाला कोई उपसमूह प्रसामान्य उपसमूह होता है । **10**

Show that any subgroup of index 2 is a normal subgroup.

2. (a) दर्शाइये कि $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ अभिसारी है, परन्तु निरपेक्ष अभिसारी नहीं है । **15**

Show that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ is convergent but not absolutely convergent.

$\frac{|\sin nx|}{n}$ $\int \frac{|\sin nx|}{n} dx$

(b) जाँचिये कि फलन $d : R \times R \to R$ जो कि $d(x, y)=\left|\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)\right|$, जहाँ $x, y \in R$, द्वारा परिभाषित है, एक दूरिक है अथवा नहीं ।

Check whether the function $d : R \times R \to R$ defined by $d(x, y)=\left|\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)\right|$ where $x, y \in R$, is a metric or not. **15**

$a_n = \frac{1}{1+a_n}$ $a_n^2 + a_n - 1$ $a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{2}$

(c) धनात्मक अंकों की एक श्रेणी $\langle a_n \rangle$ $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n \geq 0$ द्वारा परिभाषित है । दर्शाइये कि $\langle a_n \rangle$ अभिसारी है तथा उसकी सीमा ज्ञात कीजिए ।

$a_5 = \frac{1}{1+3/5} = \frac{5}{8}$ $a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ $a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$

A sequence $\langle a_n \rangle$ of positive numbers is defined as $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n \geq 0$. Show that $\langle a_n \rangle$ is convergent and find its limit. **10**

$a_{n+1} - a_n$ $\frac{1}{1+a_n} - a_n$

~~3. (a) $(1+\cos\theta\cos x)^{-1}$ के द्विपद प्रसरण के पदानुसार समाकलन को उचित सिद्ध कीजिए तथा~~ दर्शाइये कि $\operatorname{cosec}\theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \cos^{2n}\theta, 0 < \theta < \pi$. **15**

Justify the term by term integration of the binomial expansion of $(1+\cos\theta\cos x)^{-1}$ and show that $\operatorname{cosec}\theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \cos^{2n}\theta, 0 < \theta < \pi$.

$l = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_n - a_{n+1}$ $a_n - \frac{1}{1+a_n}$ a_n

(b) जाँचिये कि निम्नलिखित फलन $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है}\\ 1-x, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है}\end{cases}$

जो कि अन्तराल (0, 1) में परिभाषित है रीमान–समाकलनीय है या नहीं ।

in $(0,1)$ $x^2 < x$ $x^2 > -x$ $1-x^2 > 1-x$ $\sqrt{1-x^2} > 1-x$

Check whether the following function $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{if } x \text{ is irrational}\\ 1-x, & \text{if } x \text{ is rational}\end{cases}$

defined on the interval (0, 1) is Riemann-integrable or not. 15

(c) समूहों के लिए लैग्रांज की प्रमेय का कथन लिखकर एवं उसे सिद्ध कीजिए । उदाहरण देकर दर्शाइये कि इसका प्रतिलोम सत्य नहीं है । 10

$O(H) | O(G)$

State and prove Lagrange's theorem for groups. Give an example to show that its converse is not true.

4. (a) यदि $0 < a < 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$. 15

Prove that, if $0 < a < 1$, then $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

$(-R, \pi)$ (R, π) $(-R, \pi)$ (R, π)

(b) किसी एक–मान फलन $f(z)$ की विशिष्टता केवल $z = -1$ तथा $z = 2$ पर स्थित क्रमशः कोटि 1 एवं 2 के अन्नतक हैं, जहाँ इन अन्नतकों पर अवशेष क्रमशः 1 तथा 2 है । यदि $f(0)=\frac{7}{4}$ तथा $f(1)=\frac{5}{2}$ हो, तो फलन ज्ञात कीजिए तथा उसका $1 < |z| < 2$ में लौरेन्ट श्रेणी में विस्तार कीजिए । 15

The only singularities of a single-valued function $f(z)$ are poles of order 1 and 2 at $z = -1$ and $z = 2$ with residue 1 and 2 respectively at these poles. If $f(0)=\frac{7}{4}$ and $f(1)=\frac{5}{2}$ determine the function and expand it in a Laurent series valid in $1 < |z| < 2$.

$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z+1)(z-2)}$ Lim

(c) माना कि फलन किसी एकशः संबद्ध क्षेत्र D पर सतत् है, तथा क्षेत्र के सभी संवृत्त कंटूर C के लिए $\int_C f(z)\,dz = 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि f(z), D में विश्लेषिक फलन है । **10**

Let f(z) be continuous in a simply connected domain D and for every closed contour C in the domain D, $\int_C f(z)\,dz = 0$, then prove that f(z) is analytic in D.

खण्ड – ब/SECTION – B

5. (a) दर्शाइये कि अवकल समीकरण $2q(z - px - qy) = 1 + q^2$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ एवं $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ की वह समाकल सतह जो कि ठोस परवलयाकार $2x = y^2 + z^2$ को परिगत करता है, $z^2 = 2(x + y) + 1$ है । **15**

Show that the integral surface of the differential equation $2q(z - px - qy) = 1 + q^2$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ which is circumscribed about the solid paraboloid $2x = y^2 + z^2$ is $z^2 = 2(x + y) + 1$.

(b) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण $y^2r - 2ys + t = p + 6y$ को हल कीजिए, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ एवं $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. **15**

Solve the following partial differential equation $y^2r - 2ys + t = p + 6y$ where $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ and $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(c) उन सभी समतलों की आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि मूल बिन्दु से एक नियत दूरी 'a' पर हो । **10**

Find the partial differential equation of all planes which are at a constant distance 'a' from the origin.

$\varphi_n = c\ell$

6. (a) माना कि एक आयताकार समानांतर षट्फलक है जिसका एक समान घनत्व ρ, द्रव्यमान m तथा भुजाएँ a, b तथा c हैं। मूल बिन्दु O को एक कोने पर तथा निर्देशांक अक्षों को कगारों के साथ लेते हुए समानांतर षट्फलक के आघूर्ण एवं जडत्व के गुणनफल ज्ञात कीजिए। **15**

Consider a rectangular parallelepiped of uniform density ρ, mass m with sides a, b and c. For origin O at one corner, find the moments and products of inertia of the parallelepiped by taking the coordinate axes along the edges.

(b) समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ को निम्न प्रतिबन्धों

(i) $u(0, y) = 0$, (ii) $u(1, y) = 0$, (iii) $u(x, \infty) = 0$ एवं (iv) $u(x, 0) = \sin^3 \pi x$, $0 < x < 1$ के अधीन हल ज्ञात कीजिए। **15**

Solve the equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ under the condition

(i) $u(0, y) = 0$, (ii) $u(1, y) = 0$, (iii) $u(x, \infty) = 0$ and (iv) $u(x, 0) = \sin^3 \pi x$, $0 < x < 1$.

(c) गति की हैमिल्टन समीकरण ध्रुवीय निर्देशांकों में ज्ञात कीजिए।

Obtain the Hamilton's equation of motion in polar co-ordinates. **10**

7. (a) माना कि एक बडे गोलाकार सतह की ठोस सीमा S है जिसमें तरल पदार्थ गति में है तथा जिसमें एक या एक से अधिक बन्द दृढ़ सतह S_m, m = 1, 2, ..., k आच्छादित हैं। यदि तरल पदार्थ अनंत पर रूका है तो सिद्ध कीजिए कि गतिमान तरल पदार्थ की गतिक ऊर्जा $T = \frac{1}{2}\rho\int_v \bar{q}^2 dv = \frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{k}\int_{S_m}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$ है जहाँ प्रत्येक सतह तत्त्व dS पर अभिलम्ब तरल पदार्थ से बाहर की ओर है, ρ तरल पदार्थ का घनत्व है, v तरल पदार्थ का कुल आयतन है, $\bar{q}$ वेग सदिश है, तथा φ वेग विभव है। **15**

Let S be a solid boundary of a large spherical surface containing fluid in motion and also enclosing one or more closed rigid surfaces S_m, m = 1, 2, ..., k. If the fluid rests at infinity then prove that the kinetic energy of the moving fluid is $T = \frac{1}{2}\rho\int_v \bar{q}^2 dv = \frac{1}{2}\rho\sum_{m=1}^{k}\int_{S_m}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$, where normal at each surface element dS being drawn outwards from the fluid, ρ is the density of fluid, v is the total volume of the fluid, $\bar{q}$ is the velocity vector and φ is the velocity potential.

(b) दर्शाइये कि $\bar{q} = \dfrac{c^2(x\hat{j} - y\hat{i})}{x^2 + y^2}$ जहाँ c एक अचर है, द्वारा प्रदर्शित गति एक असम्पीड्य तरल की गति है। प्रवाहरेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइये कि वेग विभव का अस्तित्त्व है तथा उसको ज्ञात कीजिए। **15**

Show that the motion specified by $\bar{q} = \dfrac{c^2(x\hat{j} - y\hat{i})}{x^2 + y^2}$ where c is a constant, is a motion for incompressible fluid. Determine the equation of streamlines. Also show that the velocity potential exists and find its form.

(c) उन प्रवाहरेखीय समीकरण को ज्ञात कीजिए जो कि बिन्दु A(– C, 0), B(C, 0) पर m सामर्थ वाले एकसमान रैखिक श्रोत तथा मूल बिन्दु पर 2m सामर्थ वाले एकसमान रैखिक सिंक द्वारा है। **10**

Find the equation of the streamlines due to uniform line source of strength m through the points A(–C, 0), B(C, 0) and a uniform line sink of strength 2m through the origin.

8. (a) न्यूटन–रैफ्सन विधि द्वारा $\sqrt{17}$ का दशमलव के तीन अंकों तक सही मान ज्ञात कीजिए। दर्शाइये कि न्यूटन–रैफ्सन विधि के अभिसारी की दर 2 कोटि की है। **15**

Find the value of $\sqrt{17}$ using Newton-Raphson method correct upto three decimal places. Show that the rate of convergence of Newton-Raphson method is of order 2.

Let $x = \sqrt{N}$

$f(x) = x^2 - N$

$\phi = -m\log(z-c) - m\log(z+c)$

(b) निम्नलिखित सारिणी में लुप्त पद ज्ञात कीजिए ।

x :	0	1	2	3	4	5
y :	1	3	9	–	81	243

तथा $\frac{dy}{dx}$ का मान x = 3 पर ज्ञात कीजिए ।

Find the missing term in the following table.

x :	0	1	2	3	4	5
y :	1	3	9	–	81	243

and find the value of $\frac{dy}{dx}$ at x = 3.

(c) ट्रेपेजाईडल की समाकलन विधि को ज्ञात कीजिए तथा इसकी त्रुटि प्राप्त कीजिए । 10

Find trapezoidal rule of integration and obtain its error.