सत्यमेव जयते

UPPSC

Uttar Pradesh Public Service Commission

Download

UPPSC/UPPCS

Mains 2019

Optional

Exam Question Paper

"Mathematics (Paper-1)"

"Held on 26-09-2020"

No. of Printed Pages : 7

GLPC – 06/19-Paper-I

गणित (प्रश्न-पत्र – I)

MATHEMATICS (Paper – I)

निर्धारित समय : तीन घंटे]
Time Allowed : Three Hours]

[अधिकतम अंक : 200
[Maximum Marks : 200

विशेष अनुदेश : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गये हैं, जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के भाग के अन्त में निर्धारित अंक अंकित है ।

(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

Specific Instructions : (i) There are total **eight** questions in **two** Sections printed in both **Hindi** and **English**.

(ii) Answer **five** questions, selecting at least **two** questions from **each** Section.

(iii) Marks are given against **each** part of the question.

(iv) **All** questions carry **equal** marks.

खण्ड – अ/SECTION – A

1. (a) रैखिक समीकरणों के समघात निकाय को ज्ञात कीजिए, जिसकी हल समष्टि W, सदिशों के समुच्चय {(1, 2, 6, 3), (2, 3, 7, 3), (–2, –1, 3, 3)} से जनित होती है । **10**

Find homogeneous system of linear equations whose solution space W is generated by the set of vectors {(1, 2, 6, 3), (2, 3, 7, 3), (–2, –1, 3, 3)}.

Downloaded from: http://studymarathon.com/
Scanned with CamScanner

(b) केले-हैमिल्टन प्रमेय का कथन कीजिए । इस प्रमेय के प्रयोग से A^{30} ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10

State the Cayley-Hamilton theorem. Use this theorem to find A^{30}, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) एक आव्यूह P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि PAP^{-1} एक विकर्ण आव्यूह हो, जहाँ

20

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Find a matrix P such that PAP^{-1} is a diagonal matrix, where

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. (a) दिखाइए कि रैखिक रूपांतरण $T : R^3 \to R^3$, जो $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2)$ से परिभाषित है, एक समाकारिता है ।

10

Show that the linear transformation $T : R^3 \to R^3$, defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2)$, is an isomorphism.

Downloaded from: http://studymarathon.com/
Scanned with CamScanner

(b) 'a' और 'b' के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिये $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}$ का मान 1 हो सके । 10

Find the values of 'a' and 'b' in order that $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}$ may be equal to 1.

(c) f दो बार अवकलनीय एक फलन इस प्रकार है कि f(a) = f(b) = 0 और f(c) > 0, a < c < b. सिद्ध कीजिए कि a और b के मध्य कम से कम एक मान ξ होगा जिसके लिये f″(ξ) < 0. 20

A twice differentiable function f is such that f(a) = f(b) = 0 and f(c) > 0, a < c < b. Prove that there is atleast one value ξ between a and b for which f″(ξ) < 0.

3. (a) ∈-δ परिभाषा के प्रयोग से दिखाइए कि $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y)=5$.

Use ∈-δ definition to show that $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y)=5$.

(b) मूल बिन्दु से अतिपरवलय $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$, $z = 0$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 10

Find the shortest distance from the origin to the hyperbola $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$, $z = 0$.

(c) $\iint_E \sin\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ E प्रथम चतुर्थांश में निर्देशांक अक्षों एवं $x + y = 1$ से परिबद्ध क्षेत्र है । 20

Evaluate $\iint_E \sin\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$, where E is the region bounded by the co-ordinate axes and $x + y = 1$ in the first quadrant.

Downloaded from: http://studymarathon.com/
Scanned with CamScanner

4. (a) दिखाइए कि रेखाएँ

$x + 2y - 5z + 9 = 0 = 3x - y + 2z - 5$ और $2x + 3y - z - 3 = 0 = 4x - 5y + z + 3$

समतलीय है। इन रेखाओं को अंतर्निहित करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 10

Show that the lines

$x + 2y - 5z + 9 = 0 = 3x - y + 2z - 5$ and $2x + 3y - z - 3 = 0 = 4x - 5y + z + 3$

are coplanar. Find the equation of plane containing these lines.

(b) मान ज्ञात कीजिए :

Evaluate : 10

$$\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}} dx \cdot$$

(c) शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ की उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो समतल $z = 0$ के समांतर है तथा गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ को स्पर्श करती है। 20

Find the locus of the mid points of the chords of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ which are parallel to the plane $z = 0$ and touch the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

खण्ड – ब/SECTION – B

5. (a) अवकल समीकरण को हल कीजिए :

Solve the differential equation : 10

$$(2y \sin x + 3y^4 \sin x \cos x)dx - (4y^3 \cos^2 x + \cos x)dy = 0.$$

(b) $f(r)$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\vec{\nabla} f = \frac{\vec{r}}{r^5}, f(1) = 0 \cdot$ 10

Find $f(r)$ such that $\vec{\nabla} f = \frac{\vec{r}}{r^5}, f(1) = 0 \cdot$

Downloaded from: http://studymarathon.com/
Scanned with CamScanner

(c) प्राचल विचरण विधि से निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए : **20**

Using method of variation of parameters, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}\log x.$$

(a) फलन $xy^2 + yz^2 + zx^2$ का वक्र $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$ के बिन्दु $t = 1$ पर स्पर्श सदिश के अनुगत दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए । **10**

Find the directional derivative of the function $xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent vector to the curve $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$ at the point $t = 1$.

(b) यदि T^i_{jk} और S^{ab}_c क्रमशः (1, 2) एवं (2, 1) प्रकार के प्रदिशों के घटक हो, तो दिखाइए कि $T^i_{jk} S^{jk}_i$ एक (1, 1) प्रकार के प्रदिश के घटक होंगे । **10**

If T^i_{jk} and S^{ab}_c are components of tensors of type (1, 2) and (2, 1) respectively, then show that $T^i_{jk} S^{jb}_i$ will be components of a tensor of type (1, 1).

(c) गाऊस अपसरण प्रमेय का कथन कीजिए । इस प्रमेय को $\vec{F}=4x\hat{i}-2y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ के लिए $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ और $z = 3$ से घिरे हुए क्षेत्र में सत्यापित कीजिए । **20**

State Gauss divergence theorem. Verify this theorem for $\vec{F}=4x\hat{i}-2y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 3$.

7. (a) एक कण एक समान कोणीय वेग से परवलय पर नाभि के परितः चलायमान है । सिद्ध कीजिए कि उसका किसी बिन्दु पर अभिलंबिक त्वरण उसके पथ पर उस बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या के समानुपाती होगा । **10**

A particle is moving in a parabola with uniform angular velocity about the focus. Prove that its normal acceleration at any point is proportional to the radius of curvature of its path at that point.

Downloaded from: http://studymarathon.com/

Scanned with CamScanner

(b) एक पिण्ड, जो सरल आवर्त गति कर रहा है, उसका आयाम 'a' तथा आवर्त काल 'T' है । जब माध्य स्थिति से उसकी दूरी $\frac{2a}{3}$ हो, तब वेग तिगुना कर दिया जाय परन्तु आवर्त काल को न बदला जाय, तो उसका नया आयाम ज्ञात कीजिए । **10**

A body, moving in simple harmonic motion, has an amplitude 'a' and periodic time 'T'. If the velocity is trebled when the distance from mean position is $\frac{2a}{3}$, the periodic time being unaltered, find the new amplitude.

(c) एक कण, केन्द्रीय त्वरण के साथ चलायमान है जो दूरी के त्रिघात के व्युत्क्रमानुपाती है । उसे मूल बिन्दु से 'a' दूरी पर स्थित एक स्तब्धिका से ऐसे वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है जो कि 'r' त्रिज्या वाले वृत्त के लिए वेग का $\sqrt{2}$ गुना है । दिखाइए कि उसके पथ का समीकरण $r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)=a$ है । **20**

A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance. If it is projected from an apse at a distance 'a' from the origin with the velocity which is $\sqrt{2}$ times the velocity for a circle of radius 'r'. Show that the equation of it's path is $r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)=a$.

8. (a) 'r' त्रिज्या एवं 'W' भार का एक चिकना गोला एक 'a' त्रिज्या वाले क्षैतिज वृत्तीय छिद्र पर स्थिर है । छिद्र के ठीक ऊपर गोले को किसी डोरी से एक बार लपेटा जाता है तत्पश्चात डोरी को खींच कर कस दिया जाता है । डोरी में कितना तनाव होना चाहिए ताकि वह गोले को ऊपर उठा सके ? **10**

A smooth sphere of radius 'r' and weight 'W' rests in a horizontal circular hole of radius 'a'. A string is wrapped once round the sphere just above the hole and then pulled tight. What must be the tension in the string so that it will just raise the sphere ?

Downloaded from: http://studymarathon.com/
Scanned with CamScanner

(b) तीन बल सरल रेखाओं $x = 0, y - z = a; y = 0, z - x = a; z = 0, x - y = 0$ के अनुगत लगे है । दिखाइए कि इन्हें एक अकेले बलयुग्म में समानयन नहीं किया जा सकता है । **10**

Three forces act along the straight lines $x = 0, y - z = a; y = 0, z - x = a; z = 0, x - y = 0$. Show that they can not be reduced to a single couple.

(c) एक असमान डोरी गुरुत्व के आधीन लटकती है । उसके किसी बिन्दु पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल तनाव के व्युत्क्रमानुपाती है । दिखाइए कि वक्र, जिसमें यह लटकती है, एक परवलय की चाप होगी जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है । **20**

A non uniform string hangs under gravity. It's area of cross section at any point is inversely proportional to the tension. Show that the curve, in which it will hang, is an arc of a parabola with it's axis vertical.

Downloaded from: http://studymarathon.com/
Scanned with CamScanner